Die Chi-Quadrat-Verteilung,

eine detaillierte Herleitung

Hans Stocker, Schaffhausen

Version August 2023

Contents

1 Einleitung

Bei diskreten Zufallsvariablen bildet der Vergleich zwischen empirischen und theoretisch erwarteten Häufigkeiten einen geeigneten Ansatz, um das Vorliegen eines bestimmten Verteilungsmodells zu überprüfen. Der Chi-Quadrat -Test ist das zugehörige Testverfahren, dass in Medizin und Biologie sehr häufig angewendet wird. Die Prüfgrösse Chi-Quadrat kann dabei anhand einer Chi-Quadrat-Verteilung auf Signifikanz geprüft werden.
Die Chi-Quadrat-Verteilung bzw. χ^2-Verteilung (ältere Bezeichnung: Helmert-Pearson-Verteilung, nach Friedrich Robert Helmert und Karl Pearson) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Die X^2-Verteilung hat einen einzigen Parameter, nämlich die Anzahl der Freiheitsgrade n.
Sie ist eine der Verteilungen, die aus der Normalverteilung $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ abgeleitet werden kann: Hat man n Zufallsvariablen Z_i, die unabhängig und standardnormalverteilt sind, so ist die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden definiert als die Verteilung der Summe der quadrierten Zufallsvariablen $Z_1^2+\cdots+Z_n^2$.
Die Chi-Quadrat-Verteilung wurde 1876 eingeführt von Friedrich Robert Helmert, die Bezeichnung stammt von Karl Pearson (1900). In dieser Arbeit soll die Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion (pdf..probability density function), in der Folge Dichtefunktion genannt, der Chi-Quadrat-Verteilung hergeleitet werden.

2 Herleitung der pdf mit 1 Freiheitsgrad

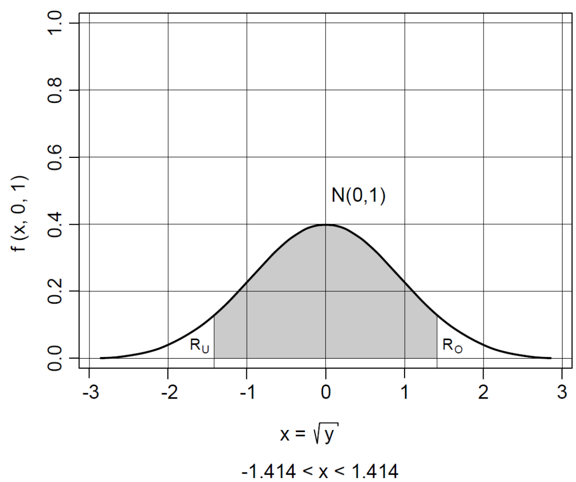
Herleitung für die Funktion mit einem Freiheitsgrad

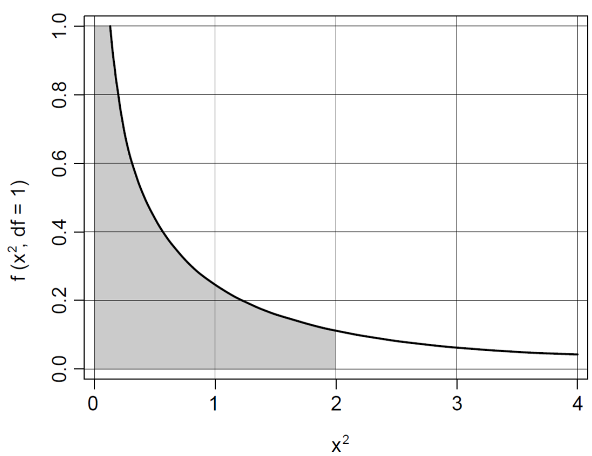
Die Zufallsvariable Y sei definiert als Y = X^2, wobei der Vektor X mit den Stichprobenwerten $x_1,...,x_n$ eine Normalverteilung hat mit Mittelwert 0 und der Varianz 1 (d.h. X $\sim$ N(0,1)). Es wird also für jeden Wert x_i (i = 1,...n) der quadratische Wert x_i^2 gbildet. Y bildet eine Chi-Quadrat-Verteilung mit 1 Freiheitsgrad:
Y $\sim$ χ^2.

Lösung der pdf:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}. \tag{1}$$

Beweis: Die Dichtefunktionen von N(0,1) und der Chi-Qadrat-Verteilung für einen Freiheitsgrad und einem Chi-Quadrat-Wert von 2 sind nachfolgend graphisch dargestellt.





$$\text{für } y < 0, P(Y < 0) = 0, \text{(Verteilung hat keine negativen Werte) und,}$$
$$\text{für } y > 0, P(Y < y) = \underbrace{P(X^2 < y)}_{I_{X^2}} = P(|X| < \sqrt{y}) = \underbrace{P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}}_{I_X}. \tag{2}$$

Da Y = X^2, ist $\sqrt{Y} = X$, d.h. die Originalwerte x können auch als $\sqrt{y}$ bezeichnet werden. Die x-Werte werden quadriert auf der y-Achse der Chi-Quadrat-Verteilung abgebildet. Dabei ergeben - x (-$\sqrt{y}$)-Werte und + x (+$\sqrt{y}$)-Werte dieselben Werte auf der y-Achse. Da beide Integrale über den gesamten Bereich 1 sind, ergibt sich die Identität der beiden Wahrscheinlichkeiten I_{X^2} und I_X bei (2).

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - \underbrace{(1 - F_X(\sqrt{y})}_{R_O} \text{ ,weil } R_O = R_U \tag{3}$$

$$F_X(\sqrt{y}) - (1 - F_X(\sqrt{y}) = 2F_X(\sqrt{y}) - 1. \tag{4}$$

Die Dichtefunktion $f_Y(y)$ von X^2 ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F_Y(y)$.

Da $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) \ \to f_Y(y) = f_{\sqrt{y}}(\sqrt{y})$:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} 2F_X(\sqrt{y}) - 1 = \frac{d}{dy} 2F_X(\sqrt{y}) - 0. \tag{5}$$

Weil X mit N(0,1) normalverteilt ist folgt mit: $F_X = \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

Wir setzen $Y = u(x)$ mit $u(x) = x^2$. Die Inverse von $u(x)$ ist $v(y) = \sqrt{y}$. Für $\sqrt{y}$ wird $v(y)$ eingesetzt, dann ableiten gemäss Kettenregel:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2F_X'(\sqrt{y}) = 2F_X'(v(y) = 2f_X(v(y))v'(y). \tag{6}$$

Mit $v(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y}{2}} dx$ und $v'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$ einsetzt, wird somit:

$$f_Y(y) = \cancel{2} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}} y^{-\frac{1}{2}} \right). \tag{7}$$

Es gilt: $\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$. Mit Γ eingesetzt ergibt somit:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}. \tag{8}$$

3 Herleitung für die Funktion mit zwei Freiheitsgraden

Die Herleitung basiert darauf, die Verteilung der Summe von zwei unabhängigen Variablen zu bestimmen.

<u>Beweis:</u>

Wir nehmen an, x und y sind die quadrierten Werte zweier unabhängiger Variablen mit den Verteilungen: $x \sim \chi_1^2$ und $y \sim \chi_1^2$, Die Dichtefunktionen von x und y sind somit:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \tag{9}$$

und

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \tag{10}$$

Gesucht ist die Dichtefunktion der gemeinsamen Verteilung von x+y,
also $f_{X+Y}(x+y)$.

Die gemeinsame Verteilung von f(x) und f(y) lautet:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}(x,y)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+y}{2}}, \tag{11}$$

wobei $\Gamma((\frac{1}{2})^2$ durch π ersetzt ist. Im weiteren seien $A = xy$ und $B = x + y$. Durch Auflösung der beiden Gleichungen nach x und y erhalten wir jeweils zwei Bereiche für die Transformation (12) und (14) für x, sowie (13) und (15) für y.

$$x = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A}}{2} \tag{12}$$

und

$$y = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A}}{2} \tag{13}$$

oder umgekehrt sind:

$$x = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A}}{2} \tag{14}$$

und

$$y = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4A}}{2} \tag{15}$$

Mittels der Jacob-Determinante ($\mathscr{J}$) können nun die x,y - Koordinaten in die A,B - Koordinaten gewechselt werden. Die Determinante wird nach derr üblichen Regel für eine 2 x 2 -Matrix (ac - bd) ausgerechnet und ergibt $= (B^2 - 4A)^{-\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \mathscr{J}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(A,B)}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial A} & \frac{\partial x}{\partial B} \\ \frac{\partial y}{\partial A} & \frac{\partial y}{\partial B} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -(B^2-4A)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1+B(B^2-4A)^{-\frac{1}{2}}}{2} \\ (B^2-4A)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1-B(B^2-4A)^{-\frac{1}{2}}}{2} \end{vmatrix} = (B^2-4A)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Nun können wir den Koordinatenwechsel für die gemeinsame Verteilung von f(x,y) nach f(A,B) vornehmen. Der vorangestellte Faktor 2 berücksichtigt, dass beim Wechsel zwei symmetrische Bereiche von x, nämlich (4) und (6), eingeschlossen werden müssen.

$$f(A,B) = 2\ x\ \frac{1}{2\pi} A^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{B}{2}} \cdot (B^2 - 4A)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Funktion f(B) ist unsere gesuchte Funktion und die Randfunktion der gemeinsamen Verteilung f(A,B). Sie berechnet sich als Integral über den ganzen Bereich der anderen Konstante A:

$$f(B) = 2\ x\ \frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi} \int_0^\infty A^{-\frac{1}{2}} (B^2 - 4A)^{-\frac{1}{2}} dA. \tag{18}$$

(18) kann umgeformt werden in :

$$
\begin{aligned}
f(B) &= 2\,x\,\frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi}\int_0^\infty (A(B^2-4A))^{-\frac{1}{2}}dA \\
&= 2\,x\,\frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi}\int_0^\infty (AB^2-4A^2)^{-\frac{1}{2}}dA \\
&= 2\,x\,\frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{AB^2-4A^2}}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Die Lösung dieses Integrals (11) wird mit der Methode der trigonometrischen Substitution entsprechend Appendix 3 durchgeführt.

Der Termen im Wurzelausdruck $\sqrt{AB^2-4A^2}$ sind Quadrate von Seiten im rechtwinkligen Dreieck :
Hypothenuse = AB^2.
Kathete = $4A^2$.
Damit ist sin(t) = $\frac{2A}{B\sqrt{A}}$.

Umformen ergibt:

$$
\begin{aligned}
2A &= sin(t)\cdot B\sqrt{A} \\
\frac{2A}{\sqrt{A}} &= sin(t)\cdot B \quad |quadrieren \\
\frac{4A^2}{A} &= sin^2(t)\cdot B^2 \\
4A &= sin^2(t)\cdot B^2 \\
A &= \frac{B^2}{4}\cdot sin^2(t). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

A aus (20) wird nun in in Integral (19) eingesetzt: Damit ergeben sich die Substitutionen:

$A = \frac{B^2}{4}\cdot sin^2(t)$.
und $dA = \frac{B^2}{4}\cdot sin(t)\cdot cos(t)$.

A aus (20) und dA werden nun in Integral (19) eingesetzt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{AB^2 - 4A^2}} dt = \frac{\frac{B^2}{4} \cdot 2 \cdot sin(t) \cdot cos(t)}{\sqrt{B^2 \frac{B^2}{4} sin^2(t) - \frac{B^2 B^2}{4} sin^2(t) sin^2(t)}} dt$$
$$= \int \frac{\frac{B^2}{2} \cdot sin(t) \cdot cos(t)}{\sqrt{\frac{B^2 B^2}{4} \cdot sin^2(t)(1 \; - \; sin^2)}} dt$$
$$= \int \frac{\frac{B^2}{2} \cdot sin(t) \cdot cos(t)}{\frac{B^2}{2} sin(t) \cdot cos(t)} dt$$
$$= \int dt$$
$$= t + C$$
$$= \arcsin\left(\frac{2A}{B\sqrt{A}}\right) + C. \tag{21}$$

Gemäss (5.3) folgt, dass dieses Integral eine Untergrenze von 0 und eine Obergrenze von $\pi/2$ hat, Dies enstpricht dem arcsin von 0 und 1. Somit wird (18) zu:

$$f(B) = 2\ x\ \frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi} \int_0^1 \text{arcsin(t)} dt$$
$$= 2\ x\ \frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi} \cdot \text{arcsin(t)}\Big|_0^1$$
$$= 2\ x\ \frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{e^{-\frac{B}{2}}}{2}. \tag{22}$$

Das Resultat der Dichte $f_{X+Y}(x+y)$ lautet also:

$$f(B) = f_{X+Y}(x+y) = \frac{e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}, \tag{23}$$

oder, wenn z = x + y:

$$f(z) = f_Z(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2}. \tag{24}$$

4 Herleitung für die Funktion mit k Freiheitsgraden

Die Herleitung basiert darauf, die gemeinsame Dichtefunktion der Normalverteilungen der k ursprünglichen Zufallsvariablen $x_1, ..., x_k$ zu bilden. Die Dichtefunktion der gesuchte Grösse $x_1^2 +, ..., +x_k^2$ erscheint dann als Randfunktion dieser gemeinsamen Dichtefunktion.

Beweis:

Theorem: Y sei eine Zufallsvariable mit einer Chi-Quadrat-Verteilung:

$$Y \sim X^2(k), \tag{25}$$

dann sei die Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion von Y:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} y^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-y/2}. \tag{26}$$

Beweis

Eine nach Chi-Quadrat verteilte Zufallsvariable mit k Freiheitsgraden ist definiert als die Summe der k quadrierten, nach Standardnormalverteilung verteilten Zufallsvariablen:

$$X_1, ..., X_k \sim N(0,1) \;\Rightarrow\; Y = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim X^2(k). \tag{27}$$

Zur Bildung der kumulativen Verteilungsfunktion werden in Erweiterung der zweidimensionalen Situation die kumulativen Wahrscheinlichkeiten der n kartesischen Koordinaten gebildet.

Kartesische Koordinaten:

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)^T \; (-\infty < x_i < \infty, i = 1, ..., k). \tag{28}$$

Kumulative Verteilungsfunktion:

$$P(x \leq x_i; N(x_i; 0,1)) = \int_{-\infty}^{x_i} N(x_i; 0,1) dx_i. \tag{29}$$

Für die gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion $\zeta_n(\mathbf{x})$ werden die einzelnen integrierten Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = \int_V \prod (N(x_i; 0,1) dx_i), \tag{30}$$

$$\text{wobei } \int_V = \int_{i=-\infty}^{x_1} x_1, ..., \int_{i=-\infty}^{x_k} x_k. \tag{31}$$

Wird für die Standardnormalverteilung $(N(x_i; 0,1))$ die Dichtefunktion eingesetzt, ergibt (30):

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = \int_V \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[-\frac{1}{2} x_i^2 \right] dx_i \right). \tag{32}$$

Wird der Produkteterm $\prod_{i=1}^{k}$ ausgerechnet, wird:

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = \int_V \frac{1}{2\pi^{k(1/2}} \cdot exp\left[-\frac{1}{2} (x_1^2 +, ..., + x_i^2) \right] dx_1 ..., dx_i. \tag{33}$$

Dann konstantes Term ausklammern und $\sum x_{i^2}$ = y setzen:

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_V \exp\left[-\frac{y}{2}\right] dx_i, ..., dx_i. \tag{34}$$

Da y innerhalb des Integral-Terms konstant bleibt, kann y ausgeklammert werden:

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = \frac{exp[-y/2]}{(2\pi)^{k/2}} \int_V dx_1, ..., dx_k. \tag{35}$$

Die Dichte bei $\zeta_n(\mathbf{x})$ ergibt sich aus der Ableitung von (35).

$$\phi_n(\mathbf{x}) = \frac{exp[-y/2]}{(2\pi)^{k/2}}. \tag{36}$$

Es gilt $y = \mathbf{x^T x}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)$ als die kartesichen Koordinaten. Mit der Notation $y = r^2$ wird (36) auch als sphärische Normalverteilung bezeichnet:

$$\phi_n(\mathbf{x}) = \frac{exp[-r^2/2]}{(2\pi)^{k/2}}. \tag{37}$$

Für (37) wird nun eine Variablentransformation mit einem Wechsel auf die Polarkoordinaten durchgeführt:

Also mit: $r(0 \leq r < \infty)$ und $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{k-1})$,

wobei $(0 \leq \theta_i < \pi, i = 1, ..., k-2;\ 0 \leq \theta_{k-1} < 2\pi)$

Die dazu benötigte Jacobi-Determinante $J\{\mathbf{x} \ \rightarrow \ (r, \theta^T)^T\}$ wird im mathematischen Anhang näher erläutert. Der Variablenwechsel ergibt für (37):

$$\psi_k(r, \theta) = \frac{exp[-r^2/2]}{(2\pi)^{k/2}} J\{\mathbf{x} \ \rightarrow \ (r, \theta^T)^T\}, \tag{38}$$

wobei $r^2 = \mathbf{x^T x}$; $J\{\mathbf{x} \ \rightarrow \ (r, \theta^T)^T\} = \det\{d\mathbf{x}/d(r, \theta^T)\} = r^{k-1} g(\theta)$.

Nach Haruhiko Ogasawara (2022) kann die Jacobi - Determinante J geschrieben werden als:

$$J\{\mathbf{x} \ \rightarrow \ (r, \theta^T)^T\} = r^{k-1} \cdot sin^{k-2}(\theta_1) \cdot sin^{k-3}(\theta_2) \cdots sin(\theta_{k-2}). \tag{39}$$

Dieser Term kann auch zur Berechnung einer Kugeloberfläche angeandt werden kann:

$$\begin{aligned} S_{k-1}(r) \cdot dr &= \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta_1 \cdots d\theta_{k-2} d\theta_{k-1} \\ &= \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cdot r^{k-1} sin^{k-2}(\theta_1) \cdot sin^{k-3}(\theta_2) \cdots sin(\theta_{k-2}) \cdots d\theta_{k-2} d\theta_{k-1}, \end{aligned} \tag{40}$$

(40) entspricht der Oberfläche einer (k-1) - dimensionalen Kugel mit $r = \sqrt{y}$, multipliziert mit dr.

$\psi_k(r)$ berechnet sich aus der Randfunktion der gemeinsamen Funktion $\psi_k(r,\theta)$ über den ganzen Bereich von $\psi_k(\theta)$:

$$\psi_k(r) = \frac{exp[-r^2/2]}{(2\pi)^{k/2}} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^{k-1} sin^{k-2}(\theta_1) \cdot sin^{k-3}(\theta_2) \cdots sin(\theta_{k-2}) d\theta_1 \cdots d\theta_{k-2} d\theta_{k-1}}_{A} . \tag{41}$$

Durch Einsetzen der bekannten Formel einer Oberfläche dieser (k-1)-dimensionalen Kugel nach (41) ergibt sich:

$$(A) = r^{k-1} \cdot 2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2) \cdot dr. \tag{42}$$

Die Randfunktion soll nun anstelle von r nach y definiert werden. Wir müssen also dr in dy ausdrücken:

$\frac{dr}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$.

Damit wird $\psi_k(r)$ zu $f_Y(y)$.

Wird $A \cdot dr$ eingesetzt, ergibt Gleichung (17) mit Kürzungen:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{exp[-y/2]}{2^{k/2}(\cancel{\pi})^{\cancel{k/2}})} \cdot \cancel{2} \cdot r^{k-1} \cancel{\pi}^{\cancel{k/2}}/\Gamma(n/2) \cdot \frac{1}{\cancel{2} y^{1/2}} \\ f_Y(y) &= \frac{exp[-y/2]}{2^{k/2} \cdot \Gamma(n/2)} r^{k-1} \cdot \frac{1}{y^{1/2}} \end{aligned} \tag{43}$$

Für $r = \sqrt{y} = y^{1/2}$ einsetzen, ergibt für $r^{k-1} = (y^{1/2})^{k-1}$. y-Terme zusamenfassen:

$(y^{1/2})^{k-1} y^{-1/2} = y^{1/2(k-1)-1/2} = y^{k/2-1/2-1/2} = y^{k/2-1}$.

$f_Y(y)$ kann nun vollständig in y ausgedrückt werden und ergibt schliesslich als Lösung von (1):

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} y^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-y/2}. \tag{44}$$

5 Mathematische Grundlagen

5.1 Doppeltes Integral

Notation

Notation für doppeltes Integral mit zwei Zufallsvariablen:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy. \tag{45}$$

Dies Notation hat historische Gründe. Die x-Limiten sind a, und b; die y-Limiten sind c und d.
Zur Lösung des Integrals wird folgende Schreibweise bevorzugt:

$$\underbrace{\int_c^d \left(\underbrace{\int_a^b f(x,y)dx}_{\text{inneres Integral}} \right) dy}_{\text{äusseres Integral}}. \tag{46}$$

Vorgehen: Zuerst wird innere Funktion nach dx in den Grenzen [a,b] integriert, wobei y als Konstante behandelt wird. Dann Integration der Lösung des inneren Integrals nach dy in den Grenzen [c,d].

Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

X und Y sind unabhängigre Zufallsvariablen (RV = random variable).

Definition gemeinsame Verteilung: 1. f(x,y) ≤ 0
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

D.h. Ganzes Volumen unter der Oberfläche f(x,y) über der x,y - Ebene beträgt 1. f(x,y) repräsentiert graphisch die Oberfläche, auch Wahrscheinlichkeitsoberfläche, dieser Funktion.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen a und b, sowie Y zwischen c und d liegt ist ein Volumen, definiert durch:

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)dxdy. \tag{47}$$

Gemeinsame Verteilungsfunktion und Dichtefunktion

Wird die xy-Ebene begrenzt durch die Werte von x und y und definiert u = $-\infty$ -x, sowie v = $-\infty$ -y, wird die gemeinsame Verteilungsfunktion definiert als:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)dudv. \tag{48}$$

d.h. für alle x,x im $\mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y). \tag{49}$$

Die Dichtefunktion (p.d.f) von $F_{X,Y}(x,y)$ ist:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y). \tag{50}$$

d.h. die Dichtefunktion wird erhalten, indem die Verteilungsfunktion zuerst nach x und dann nach y abgeleitet wird;

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{51}$$

Randverteilungen

Die Rand-Verteilungsfunktion für $X \leq x$ berechnet sich, indem neben dem Integral von $-\infty$ - x, auch über den den ganzen Bereich $-\infty \ - \ +\infty$ integriert wird, entsprechend die Rand-Verteilungsfunktion von $Y \leq y$:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v) du dv, \tag{52}$$

$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v) du dv. \tag{53}$$

die Rand-Verteilungsfunktionen (52) und (53) sind gerade die Verteilungsfunktionen von X und Y.

Die Ableitungen von (52) und (53) bezüglich x und y ergeben dann die Rand - Dichtefunktionen von X und Y:

$$f_X(x) = \int_{v=-\infty}^{\infty} f(x,v) dv \tag{54}$$

$$f_Y(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u,y) du. \tag{55}$$

5.2 Variablenwechsel, Jacobi - Determinante für eine Variable

Theorem 1:

> X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f(x). Wir definieren U = $\phi(X)$), resp. f(x(u)), wobei X = $\psi(U)$. Die Dichtefunktion von U sei g(u) . Dann gilt für den Bereich $\mid du \mid$ der Dichtefunktion g(u):
>
> $$g(u)|du| = f(x)|dx| \tag{56}$$
>
> $$oder \quad g(u) = f(x) \cdot \left| \frac{dx}{du} \right| = f[\psi(u)] |\psi'(u)|. \tag{57}$$

Der Term $\left|\frac{dx}{du}\right|$ ist die 1D Jacobi-Matrix.

Um nach du abzuleiten, muss f(x) als f(x(u)) ausgedrückt werden.

Identität (12), da Fläche unter Dichtekurven für beide Dichtefunktionen eins ergibt und dx und du proportional sind.

Beispiel für Wechsel einer Variable, also von x nach u:

f(x) = $\frac{1}{x}$ und setzen u = $\frac{1}{x}$.

Substituieren $x = u^{-1} \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = -u^{-2}$.

$f(x(u)) = f[\psi(u)] = \frac{1}{u^{-1}} = u.$

in (13) einsetzen:

$g(u) = u \cdot -u^{-2} = -\frac{1}{u}$.

Variablenwechsel, Jacobi - Determinante für zwei Variablen

Theorem 2:

> X und Y sein stetige Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichtefunktion f(x,y). Wir definieren U = $\phi_1(X,Y)$, V = $\phi_2(X,Y)$, wobei X = $\psi_1(U,V)$ und Y = $\psi_2(U,V)$. Dann ist die gemeinsame Dichtefunktion von U,V durch g(u,v) gegeben. Es gilt dann analog zu Theorem 1:
>
> $$g(u,v)|dudv| = f(x,y)|dxdy| \tag{58}$$
>
> oder
>
> $$g(u,v) = f(x,y) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = f[\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)] \cdot |J|. \tag{59}$$

Die Ausrechnung der zugehörigen Matrix von $\frac{\partial(x,y}{\partial(u,v}$ heisst 2D Jacobi-Matrix und $\left|\frac{\partial(x,y}{\partial(u,v}\right| = |J|$ die Jacobi-Determinante oder auch Funktionaldeterminante.

Berechnung der Jacobi-Matrix und Jacobi-Determinante

Die Ausrechnung der Matrix $\frac{\partial(x,y}{\partial(u,v}$ bildet sich aus allen möglichen 1. Ableitungen. Also:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{60}$$

Werden für $\frac{\partial x}{\partial u}$ =x_u etc. eingesetzt, berechnet sich die Determinante wie folgt:

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u. \tag{61}$$

Beispiel für Wechsel von zwei Variablen, also von (x,y) nach (u,v)

Bei der Kreisgeometrie gilt:

Kartesisch: $\sqrt{x^2+y^2} = r$

Funktion f(x,y) soll im Koordinatensystem (r, θ) ausgedrückt werden.

In Polarkoordinaten: $x = r \cdot cos\theta$, resp. $y = r \cdot sin\theta$.

Ein Kreispunkt mit Koordinaten(x,y) erhält Koordinaten $(r \cdot cos\theta, r \cdot sin\theta)$.

Die Jacobi-Matrix wird zu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -r \cdot sin\theta \\ sin\theta & r \cdot cos\theta \end{vmatrix}. = r(cos^2\theta + sin^2\theta) = r \tag{62}$$

Anwendung auf ein Flächenelement:

dA = f(x,y).

$$A = \int_x \int_y (f(x,y)dxdy = \int_r \int_\theta f(r \cdot cos\theta, r \cdot sin\theta) r \cdot d\theta \cdot dr \qquad (63)$$

5.3 Trigonometrische Substitution

Integrale, bei denen der Ausdruck in der Form $\sqrt{a^2 - x^2}$ oder $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ vorkommt, lassen sich durch eine geeignete trigonometrische Substitution lösen. a^2 kann als Hypothenuse und x^2 als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks betrachtet werden. Damit gelten folgende Beziehungen:
$sin(t) = \frac{x}{a}$, $x = a \cdot sin(t)$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot cos(t), (1 - sin^2(t) = cos^2(t)$.

Wird nun x mit $a \cdot sin(t)$ substituiert ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \cdot sin^2(t)} = \sqrt{a^2(1 - sin^2(t))} \\ &= a\sqrt{cos^2(t)} = a \cdot cos(t) \qquad . \end{aligned} \qquad (64)$$

Mit Einsetzen von:

$x = a \cdot sin(t)$ und

$dx = a \cdot cos(t)dt$

kann nun das Integral $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{a \cdot cos(t)}{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2(t)}} dt \\ &= \int \frac{cos(t)}{\sqrt{a^2(1 - sin^2(t))}} dt \\ &= \int \frac{cos(t)}{\sqrt{cos^2(t)}} dt \\ &= \int \frac{cos(t)}{cos(t)} dt \\ &= \int 1 \cdot dt \\ &= t + C. \end{aligned} \qquad (65)$$

Nun impliziert $a \cdot sin(t)$, dass t = $sin^{-1}(\frac{x}{a})$, also die Inverse von sin($\frac{x}{a}$)= arcsin($\frac{x}{a}$).

Damit ist die Lösung:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C. \tag{66}$$

Die Betrachtung von a und x zeigt folgende Restriktionen:

(1) Da $x < a$ sein muss, gilt $-a < x$.

(2) $-a < a \cdot sin(t) < a \quad |$. Ungleichung kürzen mit a

(3) $-1 < sin(t) < 1$.

Da arcsin(1) = $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$

(4) $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

5.4 Verteilung der Summe von zwei Zufallsvariablen

<u>Theorem</u>

X und Y seien unabhängige stetige Zufallsvariablen mit den Dichten f_X und g_Y und Z = X + Y mit der Dichte f_Z. Falls für die Funktionen f_X und g_Y das Integral

$$(f \star g)(z) := \int_{x \in \Omega x} f_X(x) f_Y(z-x) dx \quad \text{(z-x = y)}. \tag{67}$$

für alle x existiert, dann heisst f ⋆ g die Faltung von f und g. Das Zeichen ⋆ steht hier als Operator für Faltung.

Die Intuition besteht darin, dass, wenn Z = z sein soll, wir über alle Möglichkeiten von X=x summieren müssen, aber wir Y=x - z fordern, sodass die geforderte Summe z erhalten wird.

<u>Beweis</u>

Vorgehen: Wir starten mit der Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ und bilden die erste Ableitung:

Definition der Verteilungsfunktion von X + Y:

$$F_Z = P(Z \leq z). \tag{68}$$

Für jeden Punkt der Verteilungsfunktion von Z im Punkt z werden für alle Kombinationen die Wahrscheinlichkeiten von x und y multipliziert , die $z \leq z$ ergeben.

$$F_Z = \int_{x \in \Omega x} P(X + Y \leq z | X = x) f_X(x) dx. \tag{69}$$

Für den jeweiligen Wert von x, ist dann y = z - x. F_Z kann also geschrieben werden:

$$F_Z = \int_{x \in \Omega x} P(Y \leq z - x | X = x) f_X(x) dx. \tag{70}$$

Da X und Y unabhängig sind, gilt:

$$F_Z = \int_{x \in \Omega x} F_Y(z-x) f_X(x) dx. \tag{71}$$

Ableitung nach x von (5) ergibt dann die Dichtefunktion von z (F_Y wird zu f_Y):

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dx} F_Z(z) \\ &= \int_{x \in \Omega x} f_X(x) f_Y(x-z) dx. \end{aligned} \tag{72}$$

6 Referenzen

Haruhiko Ogasawara: A stochastic derivation of the surface area of the (n-1) sphere.
December 2022.

Haruhiko Ogasawara: A simple geometric derivation of the chi-square density. December 31, 2022.
Web: www.otaru-uc.ac.jp/ emt-hogasa/.